CAPíTULO 19

Redução ao Caso Homogêneo

Vários dos métodos até aqui vistos, especialmente o Método da Separação de Variáveis, só funcionam para um problema com condições de contorno homogêneas (para ser exato, **uma** condição não precisava ser homogênea, pois os coeficientes c_n eram ajustados ao final de acordo com esta última condição). Se as condições de contorno não são homogêneas, o princípio da superposição deixa de valer e o método não funciona. Felizmente, em muitos casos, é possível separar o problema em questão em um problema não homogêneo (simples) e um homogêneo (que pode ser resolvido pelo método da separação de variáveis ou outro método qualquer). Vejamos alguns exemplos deste princípio em ação[1].

EXEMPLO 140. *Dadas as constantes A e B, considere o problema do Calor a seguir*

$$(*)\begin{cases} u_t = u_{xx} \text{ para } 0<x<L \text{ e } t>0 \\ u(0,t) = A \text{ para } t>0 \\ u(L,t) = B \text{ para } t>0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ para } 0<x<L \end{cases}$$

Infelizmente, não podemos obter soluções separadas deste sistema e superpô-las – dadas soluções u_1 e u_2 das três primeiras equações, uma combinação linear de u_1 e u_2 ***não necessariamente*** *satisfaz as três primeiras equações, porque $c_1u_1(0,t)+c_2u_2(0,t) = c_1A+c_2A$ não necessariamente dá A. Ao invés, começamos por procurar uma solução particular de*

$$(**)\begin{cases} v_t = v_{xx} \text{ para } 0<x<L \text{ e } t>0 \\ v(0,t) = A \text{ para } t>0 \\ v(L,t) = B \text{ para } t>0 \end{cases}$$

Este problema é indeterminado e tem várias soluções (pois não há condição inicial, em $t=0$). Vejamos se podemos encontrar uma solução simples, digamos, que não dependa de t: $v(x,t) = X(x)$. Se esta solução existir, ela satisfará

$$X''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = ax+b$$

Como também queremos $X(0) = A$ e $X(L) = B$, chegamos à solução particular

$$v(x,t) = X(x) = \frac{B-A}{L}x + A$$

Agora façamos $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$. Afirmamos que u é solução de $(*)$ se, e somente se, w é solução de

$$(***)\begin{cases} w_t = w_{xx} \text{ para } 0<x<L \text{ e } t>0 \\ w(0,t) = 0 \text{ para } t>0 \\ w(L,t) = 0 \text{ para } t>0 \\ w(x,0) = f(x) - \left(\frac{B-A}{L}x + A\right) \text{ para } 0<x<L \end{cases}$$

De fato, usando que v resolve $(**)$:

$$\begin{aligned} w_t - w_{xx} &= 0 \Leftrightarrow (u_t - v_t) - (u_{xx} - v_{xx}) = 0 \Leftrightarrow u_t - u_{xx} = 0 \\ w(0,t) &= 0 \Leftrightarrow u(0,t) - v(0,t) = 0 \Leftrightarrow u(0,t) = A \\ w(L,t) &= 0 \Leftrightarrow u(L,t) - v(L,t) = 0 \Leftrightarrow u(L,t) = B \\ w(x,0) &= f(x) - \left(\frac{B-A}{L}x + A\right) \Longleftrightarrow u(x,0) - v(x,0) = f(x) - \left(\frac{B-A}{L}x + A\right) \Leftrightarrow u(x,0) = f(x) \end{aligned}$$

[1]Em geral: se A é uma transformação linear e $\vec{b}$ é um vetor dado, então a solução do sistema não homogêneo $A\vec{x} = \vec{b}$ pode ser decomposta como $\vec{x} = \vec{x}_P + \vec{x}_H$, onde $\vec{x}_P$ é uma solução *particular* de $\vec{A}x = \vec{b}$ e $\vec{x}_H$ é a solução *geral* de $A\vec{x} = \vec{0}$.

Assim, resolver $(*)$ *é equivalente a resolver* $(***)$ *e somar* $v(x,t) = \frac{B-A}{L}x + A$ *à solução* w *encontrada. Como* $(***)$ *é homogêneo, sabemos resolvê-lo por separação de variáveis. Explicitamente, temos*

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 t/L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ onde } c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \left(f(x) - \left(\frac{B-A}{L}x + A\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 t/L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{B-A}{L}x + A \end{aligned}$$

Vale a pena também observar o significado físico desta expressão – à medida que $t \to \infty$*, temos que* $w \to 0$ *e, portanto,* $u \to v$*. Assim,* $v(x,t)$ *é o* estado estacionário *do sistema (o estado do sistema "a longo prazo",* steady-state*) enquanto* $w(x,t)$ *determina o seu* transiente *ou* estado transitório *(o estado do sistema antes de alcançar seu estado estacionário). Mais ainda,* $v(x,t)$ *é um* equilíbrio do sistema *– isto é, se a distribuição inicial de temperatura é* $f(x) = \frac{B-A}{L}x + A$*, ela não se alterará, pois então* $w(x,t) = 0$ *e* $u(x,t) = v(x,t)$ *para todo* $t > 0$*.*

Exemplo 141. *Vamos resolver a seguinte modificação da equação da onda*

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x^2 \text{ para } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0 \\ u(x,0) = x \text{ para } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 0 \text{ para } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Agora, o princípio da superposição não vale na própria EDP (a primeira equação). Comecemos então procurando uma solução particular de

$$v_{tt} = v_{xx} + x^2$$

que não dependa de t*, isto é,* $v(x,t) = X(x)$*. Teremos*

$$X''(x) = -x^2 \Rightarrow X(x) = -\frac{x^4}{12} + ax + b$$

Como procuramos apenas ***uma*** *solução particular, vamos escolher a mais simples:* $v(x,t) = -\frac{x^4}{12}$*. Agora, se* $w = u - v$*, vem*

$$\begin{aligned} w_{tt} &= u_{tt} - v_{tt} = \left(u_{xx} + x^2\right) - \left(v_{xx} + x^2\right) = u_{xx} - v_{xx} = w_{xx} \\ w(x,0) &= u(x,0) - v(x,0) = x + \frac{x^4}{12} \\ w_t(x,0) &= u_t(x,0) - v_t(x,0) = 0 \end{aligned}$$

Este problema em w *corresponde à Equação da Onda que conhecemos, então pode ser resolvido diretamente pela fórmula de d'Alembert*

$$w(x,t) = \frac{\left(\frac{(x+t)^4}{12} + (x+t)\right) + \left(\frac{(x-t)^4}{12} + (x-t)\right)}{2} = \frac{x^4 + 6t^2x^2 + t^4}{12} + x$$

Daqui recompomos $u = w + v$*, chegando enfim à solução do problema original*

$$u(x,t) = \frac{t^2}{2}x^2 + x + \frac{t^4}{12}$$

O leitor deve se convencer que esta idéia funciona rapidamente sempre que tivermos uma E.D.P. do tipo $u_{tt} = u_{xx} + f_1(x) + f_2(t)$ *(basta tomar* $v = X(x) + T(t)$ *onde* $X'' = -f_1$ *e* $T'' = f_2$*). Teoricamente, a idéia também é sólida para E.D.P.s do tipo* $u_{tt} = u_{xx} + f(x,t)$*, mas neste caso encontrar a solução particular* v *pode ser mais complicado.*

Às vezes, o problema até é homogêneo, mas uma mudança de variáveis transforma o problema num bem mais conhecido. Vejamos um exemplo:

Exemplo 142. *Considere o seguinte problema de reação-difusão*

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} + u \text{ para } 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ para } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ para } 0 < x < L \end{cases}$$

Neste caso, não adianta encontrar uma solução particular v *tal que* $v_t = c^2 v_{xx} + v$ *e tomar* $w = u - v$*. Teríamos*

$$w_t = u_t - v_t = \left(c^2 u_{xx} + u\right) - \left(c^2 v_{xx} + v\right) = c^2 w_{xx} - w$$

que é novamente a equação inicial! Uma opção é usar diretamente o método de separação de variáveis neste problema (como fizemos nos exercícios do Cap. 11)! Outra opção interessante é tomar:

$$u(x,t) = e^t v(x,t)$$

Pois então

$$u_t = c^2 u_{xx} + u \Longleftrightarrow e^t v + e^t v_t = c^2 e^t v_{xx} + e^t v \Leftrightarrow v_t = c^2 v_{xx}$$

e v satisfaz à equação do calor tradicional! Mais especificamente, usando $v(x,t) = e^{-t}u(x,t)$:

$$\begin{cases} v_t = c^2 v_{xx} \text{ para } 0 < x < L,\ t > 0 \\ v(0,t) = v(L,t) = 0 \text{ para } t > 0 \\ v(x,0) = f(x) \text{ para } 0 < x < L \end{cases}$$

Esta equação pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis. Escrevendo a solução como uma série de Fourier, temos

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 t/L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ onde } c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

e, portanto

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(\left(1 - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)t\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Note como esta solução ***amplifica*** *os harmônicos para os quais $n < \frac{L}{\pi}$ (baixas freqüências) à medida que t cresce, e* ***atenua*** *os harmônicos para os quais $n > \frac{L}{\pi}$ (se houver um harmônico em $n = \frac{L}{\pi}$, ele será mantido intacto). Em suma, o processo trata-se de um filtro "passa-baixa".*

19.1. Exercícios

1) Resolva o problema

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 12x^2 \text{ para } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0 \\ u(x,0) = 2x^4 \text{ para } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \cos x \text{ para } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Resposta: $u(x,t) = 2x^4 + 6x^2t^2 + t^4 + \cos x \sin t$.

2) Resolva

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t} \text{ para } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \text{ para } t > 0 \\ u(x,0) = \cos 2x \text{ para } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Resposta: $u(x,t) = 1 + e^{-4t}\cos 2x - e^{-t}$.

3) Considere o problema do calor numa barra finita

$$\begin{cases} u_t = \alpha u_{xx} \text{ para } a < x < b \text{ e } t > 0 \\ u(a,t) = 0 \text{ para } t > 0 \\ u(b,t) = 0 \text{ para } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ para } a < x < b \end{cases}$$

A presença das constantes a e b ao invés de 0 e L dificultam a solução por separação de variáveis. Encontre uma mudança de variáveis que facilite a resolução desta equação. Qual a nova condição inicial?

Resposta: uma boa opção é $v(x,t) = u(x+a,t)$. Tomando $L = b - a$, ficamos com o velho problema

$$\begin{cases} v_t = \alpha v_{xx} \text{ para } a < x < b \text{ e } t > 0 \\ v(0,t) = 0 \text{ para } t > 0 \\ v(L,t) = 0 \text{ para } t > 0 \\ v(x,0) = f(x+a) \text{ para } 0 < x < L \end{cases}$$

4) Resolva a seguinte equação do transporte modificada

$$u_t + cu_x - \alpha u = 0$$

usando $u(x,t) = e^{\alpha t}v(x,t)$.

Resposta: $u(x,t) = e^{\alpha t}F(x - ct)$ *onde F é uma função qualquer.*

5) a) Seja $f(x)$ uma função que não se anula e considere a equação

$$u_t - f(x)\,u_x = 0$$

Defina uma mudança de variáveis por $u(x,t) = v(w,t)$ onde $w = w(x)$ e descubra a nova equação em v. A partir daí, escolha $w(x)$ de maneira a reduzir esta equação a uma equação do transporte em v com coeficientes constantes.

b) Escreva explicitamente a solução genérica de

$$u_t = \left(1 + x^2\right)u_x$$

Resposta: a) $v_t = f(x)\, w' v_w$. *Tomando* $w' = \frac{1}{f(x)}$, *isto é,* $w = \int \frac{1}{f(x)} dx$, *temos* $v_t = v_w$ *que é a equação do transporte com coeficientes constantes (cuja solução é* $v(w,t) = F(w+t)$*). b)* $u(x,t) = F(\arctan x + t)$, *onde* F *é uma função qualquer.*

6) A seguinte E.D.P. é um caso particular da equação de Black-Scholes (usada em finanças)

$$P_t - x^2 P_{xx} - xP_x + P = 0$$

onde $x > 0$. Utilize uma mudança de variáveis do tipo $x = e^w$ para transformá-la numa equação mais conhecida.

Resposta: Fazendo $Q(w,t) = P(x,t)$ *onde* $x = e^w$, *a nova equação em* Q *é*

$$Q_t - Q_{ww} + Q = 0$$

Tomando agora $Q(w,t) = e^{-t} u(w,t)$, *chegamos a*

$$u_t = u_{ww}$$

que é a Equação do Calor em u. *Juntando tudo, se* $u(w,t)$ *é uma solução da equação do calor* $u_t = u_{ww}$, *então* $P(x,t) = e^{-t} u(\ln x, t)$ *é uma solução da equação de Black-Scholes.*